

# 構造的に安定な非線形有限時間整定系の設計

前 田 勝 彦

岡山理科大学情報処理センター

(1993年9月30日受理)

## 1. 始めに

アクチュエータとして、非線形要素を含む問題、例えばルーリエの問題に於ては、セクタ  $(k_1, k_2)$  に含まれている任意の非線形要素を含む制御対象に対して、出力フィードバックをかけて、漸近安定である時、即ち状態変数が零に収束する時に、絶対安定と言われている。又バックラッシュ、リミター等の非線形要素を等価ゲインを使って解析する記述関数の手法が使われている。しかし何れの場合も目標値は殆んど零である。R. Mohler (1991)

所が目標値が零でない、非線形制御に関する論文が最近発表された。S.M. Shahruz, etc. (1989)

そこでは非線形要素を通る信号を、線形要素を通る信号と外乱とに分解した時、その外乱が有界である場合の、非線形系に対して、解析、設計が進められている。そこで本研究でも、バックラッシュ、リミターの非線形要素を含む制御系を、この線に沿ってオープンループ系として設計、解析を進めて見る。

## 2. 構造的に安定な多数変有限時間整定系の設計 (線形系)

構造的に安定な線形有限時間整定系の設計は、前田 (1989) に依る。それによるとホールド要素  $(1 - e^{-Ts})/s \cdot I$  (ここに  $I$  は単位行列) の出力、或いは補償装置  $C_0(s)$  の入力、は、区分的に安定の階段状関数である。内部モデル原理によれば、目標値の極は、 $G(s)/s$  の極に含まねばならない為、単極  $s = 0$  以外の目標値  $R(s)$  の極を、補償装置  $C_0(s)$  の極として含む様に設計し、それと制御対象  $G(s)$  とホールド要素の積分器  $1/s$  との積、即ち  $G(s) \cdot C_0(s)/s$  が可制御、可観測、或は、 $G(s) \cdot C_0(s)$  が可制御、可観測で、極  $s = 0$  が  $G(s) \cdot C_0(s)$  の何れの transmission zero でない場合について考える。

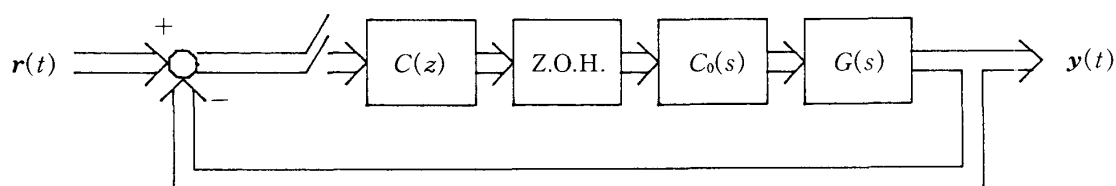


図1 有限時間整定系

その  $G(s) \cdot C_0(s)/s$  の最小実現を  $(F, G, H)$  で表わす時に、有限時間で整定する為には、 $He^{Ft}$  の張る線形空間を  $L(He^{Ft})$  とする時に、目標値を  $\mathbf{r}(t)$  とすると

$$(i) \quad \mathbf{r}(t) \in L(He^{Ft})$$

$$(ii) \quad (e^{FT}, G) \text{ が可制御対で, } (H, e^{FT}) \text{ が可観測対}$$

$$(iii) \quad \text{目標値 } \mathbf{r}(t) \text{ と出力 } \mathbf{y}(t) \text{ との誤差 } \mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t) \text{ の } z \text{ 変換 } \mathbf{E}(z) \text{ が } z^{-1} \text{ の多項式ベクトル}$$

である事である。

或は、制御対象  $G(s)$  の状態ベクトルと目標値  $\mathbf{R}(s)$  の状態ベクトルが、有限整定時刻で完全に一致する事である。この時目標値と出力は、有限整定時刻以降、サンプル時点だけでなく、サンプル時点内でも完全に一致する。

次にホールド要素込みの補償装置と制御対象のパルス伝達関数、 $HG(z) = (1 - z^{-1})Z(G(s) \cdot C_0(s)/s)$  が可制御、可観測の場合の左右既約行列商表現を次の様に表わす。

$$\begin{aligned} HG(z) &= \tilde{D}_T^{-1}(z) \tilde{N}_T(z) \\ &= N_T(z) D_T^{-1}(z) \end{aligned}$$

ここに、 $\tilde{D}_T(z)$ ,  $\tilde{N}_T(z)$ ,  $N_T(z)$ ,  $D_T(z)$  は  $z^{-1}$  の多項式行列とする。

この時、制御装置  $C(z)$  の左右既約行列商表現を、

$$\begin{aligned} C(z) &= \tilde{D}_C^{-1}(z) \tilde{N}_C(z) \\ &= N_C(z) D_C^{-1}(z) \end{aligned}$$

とし、 $\tilde{D}_C(z)$ ,  $\tilde{N}_C(z)$ ,  $N_C(z)$ ,  $D_C(z)$  はやはり  $z^{-1}$  の多項式行列であり、次のベズーの等式より設計する事ができる。即ち、

$$\begin{pmatrix} D_T(z) & -N_C(z) \\ N_T(z) & D_C(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{D}_C(z) & \tilde{N}_C(z) \\ -\tilde{N}_T(z) & \tilde{D}_T(z) \end{pmatrix} = I$$

之は、 $HG(z) = N_T(z) D_T^{-1}(z)$  が定数行列を除いて既約の時に、 $C(z)$  が求まる。この様に設計しておく、 $GH(z)$ ,  $C(z)$  のパラメータに同定誤差、設定誤差がない場合には完全整定するが、両者に誤差があっても、フィードバックループが安定、即ち内部安定の場合には、目標値と出力との誤差は零に収束する。即ち構造的に安定となる。

### 3. 非線形システムの設計法

(i) 制御対象の入力部にバックラッシュを含む場合

この場合図2に示す如く、非線形制御システムを、線形システムに有界な外乱  $|d(t)| \leq d_0$  が加わった場合と考える事が出来る。所が非線形システムを線形システムと外乱に分けると、外乱に相当する部分がフィードバックされるので増幅されて、外乱が出力に及ぼす

影響はかなり大きい。図 3 参照。

そこで、同定された制御対象のモデルより、バックラッシュを含まない線形回路を構成し、モデルの出力と目標値との誤差を作り、上のフィードバック回路と同じ制御装置への入力とする。それを後段に継いでオープンループを作る。するとオープンループの出力、いいかえると外乱込みの制御対象の出力と、先のフィードバックループにより出来た出力との先は、ほぼ外乱の影響のみになる。そこで外乱の出力に対する影響が少くなる様に、制御対象の極を安定化し、絶対値が大きくなる様に移した後に、部分分数展開すると、極

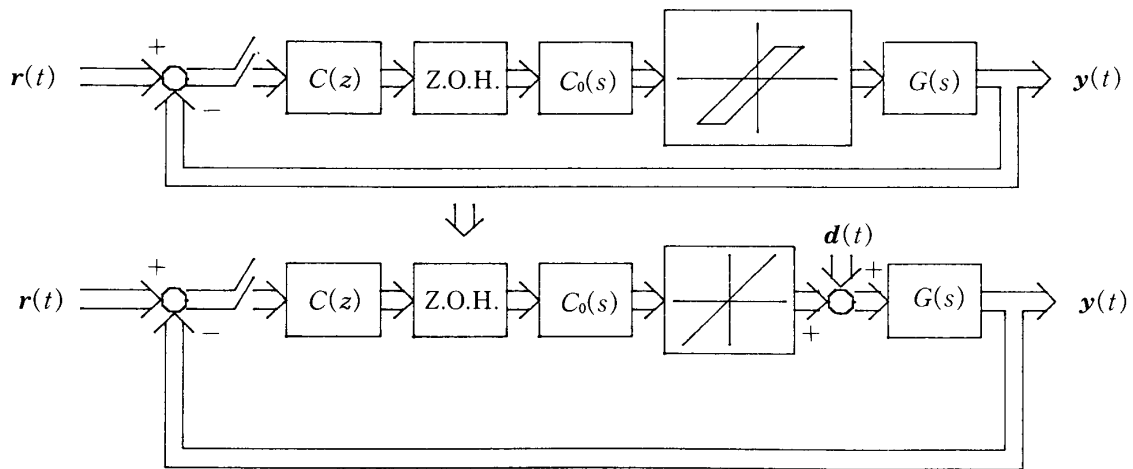


図 2 バックラッシュを含む制御系とその等価回路

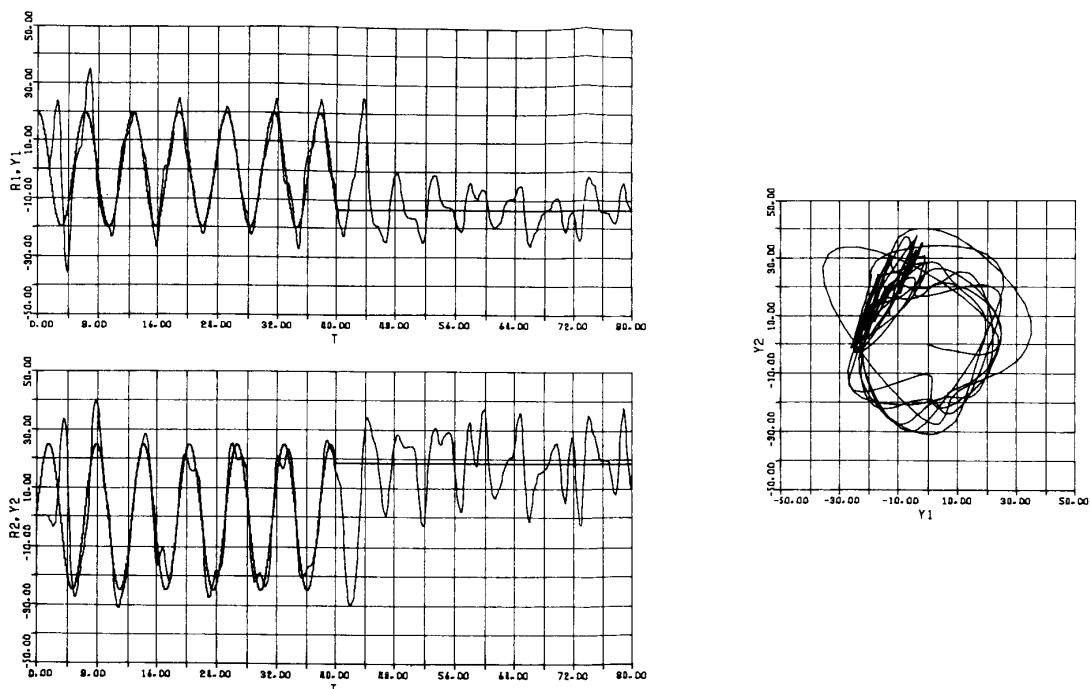


図 3 バックラッシュを含むフィードバック応答

配置をして,

$$G(s) = \sum \frac{\beta_i s + \gamma_i}{(s + \alpha_i)^2 + \omega_i^2} + \sum \frac{\delta_i}{s + \epsilon_i}$$

ここに,  $\alpha_i \gg 1$ ,  $\epsilon_i \gg 1$  とできる。

$G(s)$  のインパルス応答  $g(t)$  は,

$$g(t) = \sum a_i e^{-\alpha_i t} \cos(\omega_i t + \eta_i) + \sum b_i e^{-\epsilon_i t}$$

外乱は有界で,  $|d_i(t)| \leq 1$  でおさえられるとする。外乱による出力  $y_d(t)$  は,

$$y_d(t) = \int_0^t g(t - \tau) d(\tau) d\tau$$

絶対値をとって,

$$\begin{aligned} |y_d(t)| &= \left| \int_0^t g(t - \tau) d(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_0^t |g(t - \tau)| |d(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

$|d(\tau)| \leq 1$  でおさえられるので,

$$(\text{与式}) \leq \int_0^t |g(t - \tau)| d\tau$$

$|\cos(\omega_i t + \eta_i)| \leq 1$  より,

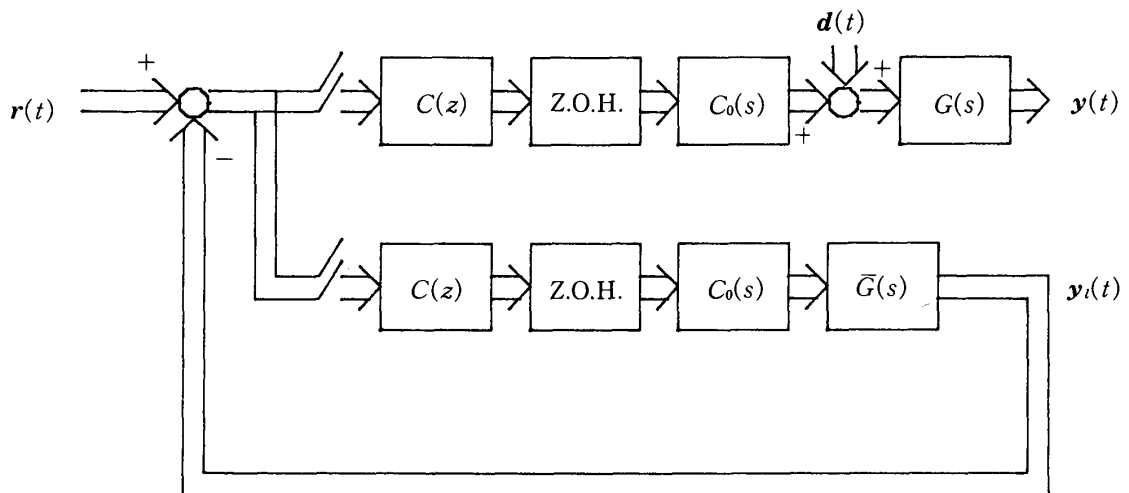


図4 バックラッシュを含まないモデルにより, 推定された出力と目標値との誤差を入力に持つオープンループ系

$$\begin{aligned}
 |y_d(t)| &\leq \int_0^t (\sum |a_i| e^{-a_i \tau} + \sum |b_i| e^{-\varepsilon_i \tau}) d\tau \\
 &\leq \int_0^\infty (\sum |a_i| e^{-a_i \tau} + \sum |b_i| e^{-\varepsilon_i \tau}) d\tau
 \end{aligned}$$

一方、ラプラス変換の定義より、

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt$$

に  $s = 0$  を代入して、

$$G(0) = \int_0^\infty g(t) dt$$

となるので、

$$\begin{aligned}
 |y_d(t)| &\leq (\sum |a_i| \mathcal{L}[e^{-a_i t}]_{s=0} + \sum |b_i| \mathcal{L}[e^{-\varepsilon_i t}]_{s=0}) \\
 &= \frac{\sum |a_i|}{\alpha_i} + \frac{\sum |b_i|}{\varepsilon_i}
 \end{aligned}$$

従って、上の評価に依り、外乱の出力への評価は上式でおさえられる。

多変数システムも同様に評価される。

(ii) 制御対象の出力にリミターを含む場合

之はシリンダーのピストンの例である。

出力回路にリミターを含む場合には、リミター回路をフィードバックから外せば良い。

リミターをフィードバック回路に入れて、フィードバックすると、(i)の場合と同様に、線形部と外乱とに分解して考えると、大きな外乱が発生する時フィードバックの為、大きな外乱が記憶されて、出力は大きく発散するが、フィードバック回路から外すと、リミターは静的な効果のみで、外乱は記憶されず、インパルス効果のみで、出力は目標値に次第に収束する。

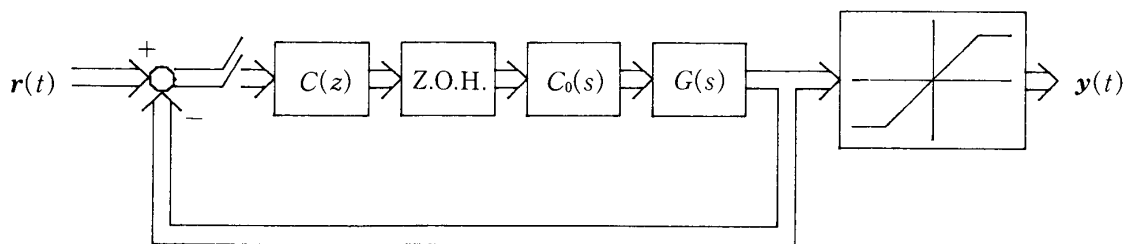


図5 出力にリミターを含む回路

#### 4. 例 題

(i) 補償装置と制御対象の間にバックラッシュが入る場合

之の例題はサーボで，制御対象を一定角度だけ回転させて静止させる場合に相当する。

制御対象は，

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{10.0}{s+5.0} & \frac{25.0}{s+4.0} \\ \frac{20.0}{s+3.0} & \frac{15.0}{s+2.0} \end{pmatrix}$$

制御対象の推定値は上の場合から僅かにずれて，

$$\bar{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{10.5}{s+5.2} & \frac{25.5}{s+4.2} \\ \frac{20.5}{s+3.2} & \frac{15.5}{s+2.2} \end{pmatrix}$$

目標値は，

$$r_1(t) = \begin{cases} 20.0 \cos(t) & (0 \leq t \leq 40) \\ 20.0 \cos(40.0) & (40 \leq t \leq 80) \end{cases}$$

$$r_2(t) = \begin{cases} 25.0 \sin(t) & (0 \leq t \leq 40) \\ 25.0 \sin(40.0) & (40 \leq t \leq 80) \end{cases}$$

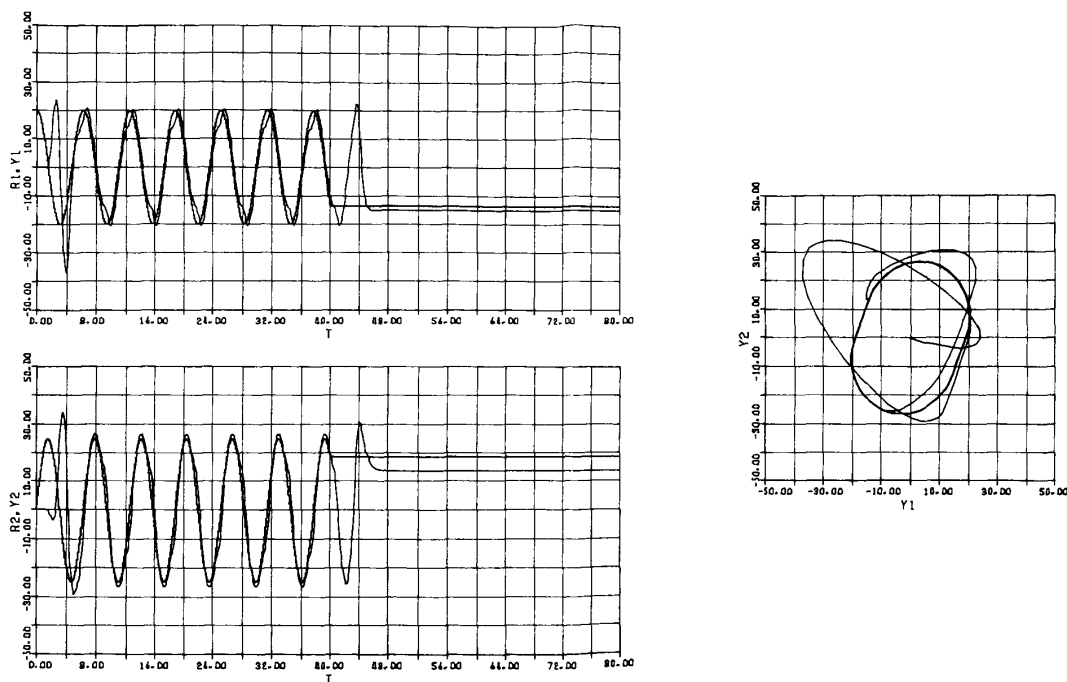


図6 極の絶対値が小さい場合のバックラッシュを含むオープンループ系の応答

サーボ補償器は,

$$C_0(s) = \left( \frac{1}{s^2 + 1} I \right)$$

である。サンプル時間間隔  $T = 1$  であり, 図 6 に上のモデルの応答を示し, 図 7 に制御対象の極配置により, 制御対象の極を 5 倍にした応答を示す。

(ii) 制御対象の出力にリミターが含まれる場合を図 8 に示す。

制御対象は,

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{10.0}{s} & \frac{25.0}{s} \\ \frac{20.0}{s} & \frac{15.0}{s} \end{pmatrix}$$

$G(s)$  の同定値  $\bar{G}(s)$  は,

$$\bar{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{10.5}{s} & \frac{25.5}{s} \\ \frac{20.5}{s} & \frac{15.5}{s} \end{pmatrix}$$

で, 目標値は,

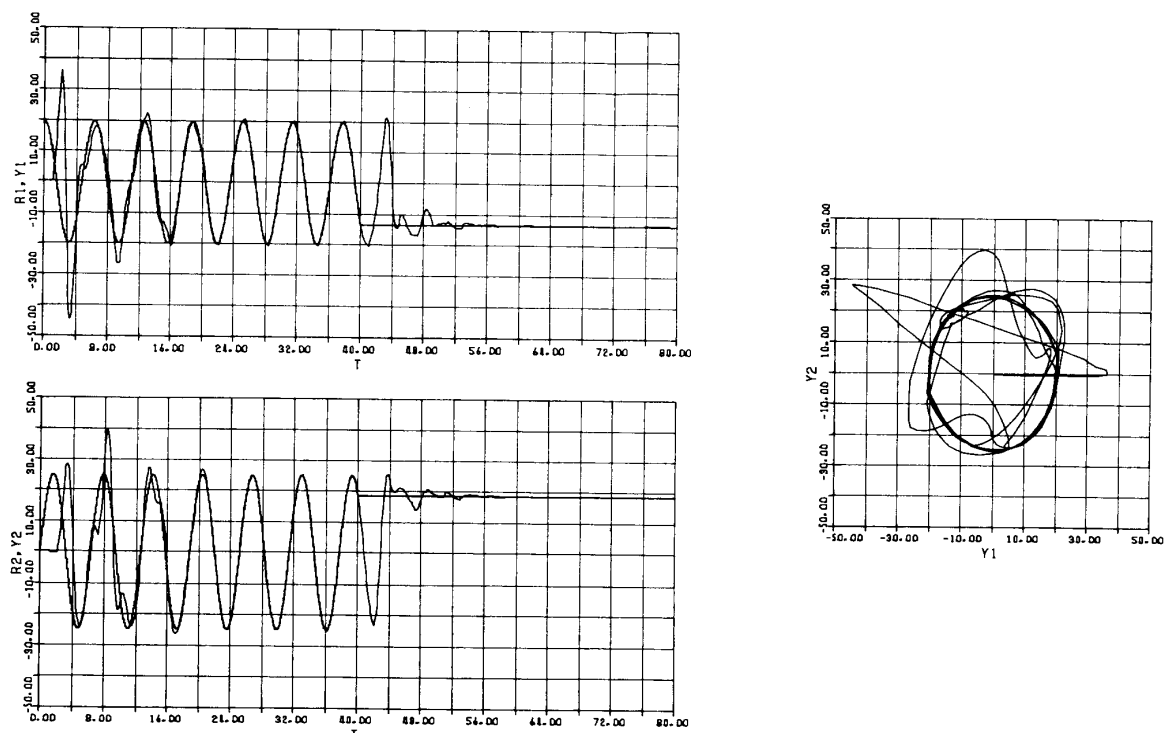


図 7 極の絶対値を 5 倍にした場合の応答

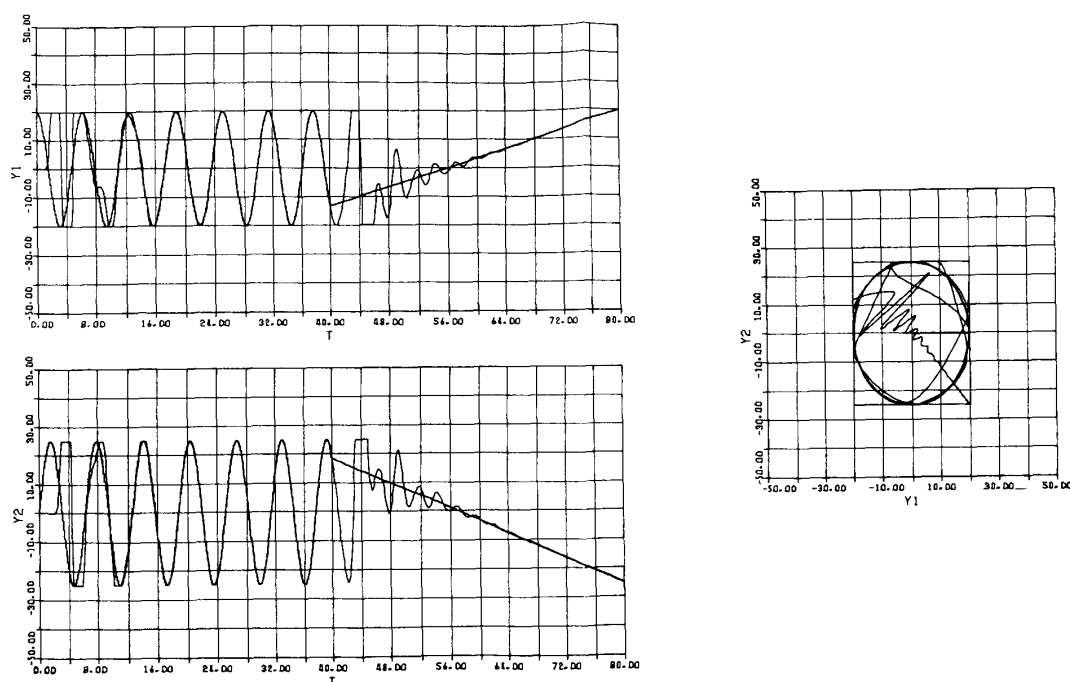


図8 出力にリミターを含む系の目標値対出力，出力1対出力2

$$r_1(t) = \begin{cases} 20.0 \cos(t) & (0 \leq t \leq 40) \\ 0.5(1 - \cos(40.0))(t - 40.0) + 20.0 \cos(40.0) & (40 \leq t \leq 80) \end{cases}$$

$$r_2(t) = \begin{cases} 25.0 \sin(t) & (0 \leq t \leq 40) \\ -5.0/8.0(1 + \sin(40.0))(t - 40.0) + 25.0 \sin(40.0) & (40 \leq t \leq 80) \end{cases}$$

サンプル時間間隔  $T = 1.0$ ，リミター制限は， $|y_1| \leq 20.0$ ， $|y_2| \leq 25.0$ ，サーボ補償器は， $(1/(s^2 + 1) \cdot I)$ 。

図8にリミターを出力に含む系の応答を示す。

## 5. 結 び

S.M. Shahruz etc. (1989) に依ると，非線形系を線形要素と外乱とに分解し，外乱が有界の場合のフィードバックシステムの設計について述べてある。そこで筆者は，非線形要素を含まないフィードバック系をモデルとして設計し，その時の出力と目標値との誤差を制御装置への入力にして，オープンループシステムを構成する。

制御対象の極を安定化し，負の絶対値の大きさを大きくして，外乱のみの出力への影響を小さくする設計法について述べた。

更に，リミターを制御対象の出力部分に含むシステムに対しては，フィードバック回路に組み込むと，外乱部分によりフィードバックされて，大きく振動するので，外乱部分をフィードバック回路から外すと，外乱効果は記憶されず，静的なインパルスのみとなり，



出力は目標値に収束する。

#### 参考文献

- 1) R. Mohler : Nonlinear systems. Vol. 1 Dynamics and Control. Prentice Hall (1991)
- 2) S.M. Shahruz and J. Hauser : Design of Compensators for a Class of Nonlinear Systems. Proceedings of the 1989 American Control Conference. pp 2574—2575 (1989)
- 3) 前田勝彦 : 構造的に安定で, 確定外乱を除去し, 制御入力への無駄時間を含む多変数有限整定時間系の設計. 岡山理科大学紀要, 第25号A別刷, pp 249~272 (平成2年3月)
- 4) Peter A. Cook : Nonlinear Dynamical Systems. Prentice Hall (1986)

## The Design of Structurally Stable Nonlinear Finite Settling Time Control System

Katsuhiko MAEDA

*Information Processing Center*

*The Faculty of Technology*

*Okayama University of Science*

*Ridai-cho 1-1, Okayama 700, Japan*

(Received September 30, 1993)

Nonlinear control system with reference input which is not necessarily zero is treated. As nonlinear elements, backlash and limiter are considered. The signal which passes through nonlinear element is decomposed into the one which passes linear element and disturbance.

At first for the model of linear system without above disturbance the feedback system is shown. Using Bezout identity, the control device is set to become internally stable and to settle in finite time, and as all of the poles of feedback transfer function become zero.

Nonlinear open loop system is designed for the error between reference input and output of above linear system to become input of the control device. If controlled object is controllable, the real part of the poles of controlled object can be moved far to the left half plane greatly by pole allocation. Then stational error by disturbance can be made small.

Numerical examples for this nonlinear system are illustrated.